



TITLE:

三次元開多様体の芯(グラフ理論と3次元多様体)

AUTHOR(S):

垣水, 修

CITATION:

垣水, 修. 三次元開多様体の芯(グラフ理論と3次元多様体). 数理解析研究所講究録 1985, 575: 241-252

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99223>

RIGHT:

三次元非多様体の芯

広島大 理 垣水修 (Osamu Kakimizu)

non-compact 3-mfld について, つぎの P. Scott
の結果があります:

Theorem (P. Scott [7, 8]). W^3 : non-compact
3-mfld s.t. $\pi_1(W)$: 有限生成

$$\implies W \supset \exists N^3: \text{compact 3-submfd s.t.} \\ \pi_1(N) \xrightarrow{\cong} \pi_1(W).$$

この定理をもとに non-compact 3-mfld について調べて
みたことを述べます. 以下,

- PL category で論じる,
 - “3-mfld” はすべて connected, orientable とする,
 - W^3 は, non-compact, irreducible 3-mfld と,
- ∂W は compact, $\pi_1(W)$ は有限生成であるとする.

Definition. $W \supset N^3$: 3-submfd が W の芯 (core) であるとは,

(1) N : compact, irreducible

(2) $\partial N \supset \partial W$

(3) $\pi_1(N) \xrightarrow{\cong} \pi_1(W)$.

• W, N は共に aspherical だから, N は W の deformation retract である.

Theorem 1. W はつねに core をもつ.

証明の方針 Scott の定理から, $\text{Int } W \supset \exists N_0$ s.t. $\pi_1(N_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(W)$ となる. この N_0 を, irreducible で, $\partial N \supset \partial W$ となるものでとり直すことを考える. irreducible な N_0 をとることは容易にできる. ∂W を含むようにとるためには, まず ∂W の各 compo. が incompressible のときを考える. irreducible な N_0 の性質をいくつかしらべておく (cf. Prop. 2). $U \subset W - \text{Int } N_0$ を $U \cap \partial W \neq \emptyset$ なる compo. とする. このとき, $F = U \cap N_0$ は ∂N_0 のひとつの compo. で, $T = U \cap \partial W$ も ∂W のひとつの compo からなり, U が compact になることが示せる. さらに $U \approx F \times [0, 1]$ となる. これが

ら, ∂W の各 compo T に対して, T を含む $W - \text{Int } N_0$ の compo を U_T とすると, $U_T \approx T \times [0, 1]$ で, $N = N_0 \cup \bigcup_{\partial W \ni T: \text{compo}} U_T$ とおけば, 求める core になる.

∂W が compressible な compo をもつときは, W を, 有限個の properly embedded な disjoint disks で切って, 各 compo が incompressible な boundary をもつようにする. この各 compo の core をとり, つなげれば, W の core が得られる. \square

Proposition 2. $W \supset N$ を core とし, $C(W - N) \supset U$ をひとつの compo. とすると,

(1) $\partial U = U \cap N$ は ∂N のひとつの compo からなる.

(2) U の end の数はひとつ.

(3) さらに, ∂U が W で incompressible ならば,

∂U は U の deformation retract である.

(4) $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq 0, \mathbb{Z}$) のとき,

∂N の各 compo は W で incompressible.

証明 (1) $U \cap N$ が ∂N のふたつ以上の compo からなるとし,

そのひとつを F とする. $\text{Int } W$ の s.c.c. J で, $J \cap F = \{a\}$,

J と F は a で transverse に交わるものがとれる. 一方,

$\pi_1(N) \xrightarrow{\cong} \pi_1(W)$ から, J は $\text{Int} N$ 内の S.C.C. に homotopic である. したがって, J と F との intersection number を考えれば矛盾.

(2) $W' = \text{Cl}(W - N)$ とおく. $W' \cup N = W$, $W' \cap N = F \cap N$.

D.B.A. Epstein [1] から, W' の end の数は $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_e^0(W'; \mathbb{Z}_2)$ に等しい.

$$\begin{array}{ccc}
 H_e^0(W') & \longrightarrow & H^0(W') \longrightarrow H_e^0(W') \longrightarrow H_e^1(W') \\
 \parallel? & & \parallel? \\
 H_3(W', \partial W') & & H_2(W', \partial W') \\
 \parallel? & & \parallel? \\
 H_3(W, N) = 0 & & H_2(W, N) = 0
 \end{array}$$

これから W はちょうど二つの end をもつことがわかる.

(3) Van Kampen の定理からわかる.

(4) は, つぎの事実からわかる:

M^3 : compact irreducible 3-mfld について,

$\pi_1(M)$: indecomposable ($\neq 0, \mathbb{Z}$)

$\iff \partial M$ の各 compo が incompressible. \square

Theorem 3. $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$) のとき, N_0, N_1 を W のふたつの core とすると, isotopy $h: W \times [0, 1] \rightarrow W$ で, $h_0 = \text{id}$, $h_1(N_0) = N_1$, $h_t|(W - K) \cup \partial W = \text{id}$ (K は W の compact polyhedron) となるものがある.

• $\pi_1(W)$ が \mathbb{Z} または decomposable のときは, Th. 3 は成り立たない. しかし, 一般につきのことはいえる:

Theorem 4. $W \supset N_0, N_1$ をふたつの core とする
 $\Rightarrow N_0 \approx N_1$.

Th. 3, 4 を示すためには, つぎの定理が必要となる.

Theorem 5. M^3 : compact, irreducible 3-mfd.

$M \supset N_0, N_1$: compact, irreducible 3-submfd's s.t.

$N_0 \cap \partial M = N_1 \cap \partial M (= \emptyset \text{ or } \neq \emptyset)$ は, ∂M のいくつかの compo からなり, inclusion $\alpha_i: N_i \hookrightarrow M$ に対して,

$$(\alpha_i)_*: \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(M) \text{ mono } (i=0,1).$$

さらに, $\text{Im}(\alpha_0)_*$ と $\text{Im}(\alpha_1)_*$ が $\pi_1(M)$ で "conjugate" で,

$\pi_1(N_0) \cong \pi_1(N_1)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$).

$$\Rightarrow \exists h: M \times [0,1] \longrightarrow M \text{ isotopy s.t.}$$

$$h_0 = \text{id}, h_1(N_0) = N_1, h_t|_{\partial M} = \text{id}.$$

証明の方針 まず, 証明に用いるふたつの定理をあげておく.

Theorem (J. Simon [9], W.H. Jaco [3]).

M^3 : compact, irreducible 3-mfd. $M \supset N^3$: compact, irreducible 3-submfd s.t. $N \cap \partial M$ は ∂M のいくつかの compo からなり, $N \cap \partial M$ および $F \cap N = \partial N - (N \cap \partial M)$ は M で共に incompressible とする. このとき, $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$ を M の covering で, $p_* \pi_1(\tilde{M}) = \pi_1(N)$ とするものとすると, \tilde{M} の mfd compactification が存在する. i.e.

$\exists \hat{M}$: compact, irreducible 3-mfd, $\partial M \supset X$: compact set s.t. $\tilde{M} = \hat{M} - X$.

Theorem (F. Waldhausen [11 , Prop. 5.4])

M^3 : compact, irreducible 3-mfd.

$\text{Int} M \supset F, G$: 2-sided incompressible closed surfaces, s.t. F と G は transverse に交わり, $F \cap G$ は disjoint な circles で, 'その各 compo は F で' (したがって G で) essential とする. このとき,

$\exists f: F \times [0, 1] \rightarrow M$ homotopy s.t. $f_0 = \text{id}$, $f(F \times 1) \subset G$

$\Rightarrow F \supset \exists F'$: subsurface, $\exists e: F' \times [0, 1] \rightarrow M$ embedding s.t. $e_0 = \text{id}$, $F' \cap G = \partial F'$, $G' \cap F = \partial G'$ $G' \equiv e(F' \times 1 \cup \partial F' \times [0, 1]) \subset G$.

このふたつの定理を用いて, Th. 5 の証明をつぎのような

方針でおこなう。まず, M の isotopy ($\text{rel } \partial M$) で, N_0 を動かして, $\partial N_0 \cap \partial N_1$ は disjoint な circles からなり, 'この circles の個数が最小であるようにする。簡単のため N_0, N_1 は $\text{Int } M$ 内にあるとする。 $p: \tilde{M} \rightarrow M$ を covering で, $p_* \pi_1(\tilde{M}) = \pi_1(N_1)$ なるものとする, 上記の Simion の定理から, $\tilde{M} = \hat{M} - X$ s.t. \hat{M} : compact, irreducible 3-mfld $\partial \hat{M} \supset X$: compact subset. となる。このとき N_1 の lift を \hat{N}_1 とすると, $\hat{M} = \hat{N}_1 \cup \partial \hat{N}_1 \times [0, 1]$ とみなせる。 $\text{Im}(\alpha_0)_*$ と $\text{Im}(\alpha_1)_*$ とが $\pi_1(M)$ で conjugate なことから, N_0 の lift \hat{N}_0 が存在する。さらに \hat{N}_0 は \hat{M} の deformation retract になっている。このことから, isotopy $\hat{g}: \hat{M} \times [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ s.t. $\hat{g}_0 = \text{id}$, $\hat{g}_1(\hat{N}_0) = \hat{N}_1$ の存在がうえる。さらに, この \hat{g} を用いて, homotopy $g: N_0 \times [0, 1] \rightarrow M$ s.t. $g_0 = \text{id}$, $g_1: N_0 \approx N_1$ となるものが得られる。 $\partial N_0 = A_1 \cup \dots \cup A_m$, $\partial N_1 = B_1 \cup \dots \cup B_m$, $B_i = g_1(A_i)$ とおく。このとき, つぎを示す。

$$A_i \cap B_i = \emptyset \quad (\forall i).$$

A_i と B_i は $C_i = A_i \times [0, 1]$ を M で bound している。

$$C_i \cap A_j = \emptyset = C_i \cap B_j \quad (\forall i \neq j)$$

これらの証明に上記の Waldhausen の定理を用いる。これから, M の isotopy $\{h_t\}$ で, $h_1(A_i) = B_i \quad (\forall i)$ とできる。さらにこのとき, $h_1(N_0) = N_1$ となっている。 \square

Corollary. Th.5は, M が non-compact でも成り立つ.

- Th.3は, この Corollary から直ちにわかる.

Th.4の証明の方針 $\pi_1(W)$ が free group ならば", N_0 と N_1 は genus の等しい handle body である. そこで,

$$\pi_1(W) \cong G_1 * \cdots * G_m * \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{r \text{ 回}} \quad \begin{array}{l} G_i: \text{indecomposable} \neq \mathbb{Z} \\ m \geq 1, r \geq 0 \end{array}$$

と仮定する. このとき, N_0 内の proper disjoint disks $\{D_j\}$ および N_1 内のそれ $\{E_j\}$ で "つき"をみたすものがとれる.

$$N_0 - \bigcup_j D_j \times (-1, 1) = L_1 \cup \cdots \cup L_m,$$

$$N_1 - \bigcup_j E_j \times (-1, 1) = M_1 \cup \cdots \cup M_m, \quad \text{s.t.}$$

L_i, M_i は compact, irreducible 3-mfds,

$\pi_1(L_i) \cong G_i \cong \pi_1(M_i)$, $\pi_1(L_i)$ と $\pi_1(M_i)$ は $\pi_1(W)$ で互いに conjugate.

これからまず, isotopy $h: W \times [0, 1] \rightarrow W$ で $h_0 = \text{id}$, $h_1(L_i) = M_i$ ($\forall i$) となるものの存在を示し, つぎに $\bigcup_i L_i$ と $\bigcup_i M_i$ に attach されてくる 1-handles $\{D_j \times [-1, 1]\}$, $\{E_j \times [-1, 1]\}$ の attach のされかたをみて $N_0 \simeq N_1$ を示す.

isotopy h の構成は 帰納法による. まず Th.5 から, isotopy $h^{(1)}: W \times [0, 1] \rightarrow W$ で $h_0^{(1)} = \text{id}$, $h_1^{(1)}(L_1) = M_1$ とな

るものがある. このとき $h_1^{(1)}(N_0), h_1^{(1)}(L_1), \dots, h_1^{(1)}(L_m)$ は N_0, L_1, \dots, L_m と同様の性質をもつから, 簡単のため $h_1^{(1)}(N_0) = N_0, h_1^{(1)}(L_i) = L_i$ とする. i.e. $L_1 = M_1$ であったとする. このとき, つぎがわかる: L_2 と M_2 は $W - L_1$ の同一の compo に入る. その compo を W_2 とすると, $\pi_1(L_2)$ と $\pi_1(M_2)$ は $\pi_1(W_2)$ で conjugate になる. したがって Th_1 から, isotopy $h^{(2)}: W \times [0, 1] \rightarrow W$ で $h_0^{(2)} = id, h_1^{(2)}(L_2) = M_2, h_t^{(2)}|_{M_1} = id$ となるものがある. 以下帰納的に isotopy h を得る.

h の存在から, $L_i = M_i \subset W$ ($\forall i$) と仮定してよい.

$N_0 \approx N_1$ を示すには, 各 compo $F \subset \partial N_0$ に対して, $F \cap G \neq \emptyset$ となる ∂N_1 の compo が唯一つあるから, $F \approx G$ を示せばよい. W の end を E_1, \dots, E_k とする. $Cl(W - N_i) = A_i^0 \cup \dots \cup A_i^k$, A_j^0 と A_j^1 の end は E_j とする. このとき, $\partial A_j^0 \approx \partial A_j^1$ を示せばよい. これは

$$H^1(\partial A_j^0) \xleftarrow{\cong} H^1(A_j^0) \xrightarrow{\cong} H^1(E_j) \xleftarrow{\cong} H^1(A_j^1) \xrightarrow{\cong} H^1(\partial A_j^1)$$

を示すことによってわかる. \square

Theorem 6. $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$) のとき,

$$W = \bigcup_i V_i \quad \text{s.t.}$$

(1) $W \supset V_i$: compact, irreducible 3-submfd

(2) $V_i \subset V_{i+1} - \text{Fr } V_{i+1}$

(3) $V_i = N_i \cup (1\text{-handles})$ s.t.

N_i は W_i の core, $N_i \subset N_{i+1} - \text{Fr } N_{i+1}$

$Cl(N_{i+1} - N_i) \approx \text{Fr } N_i \times [0, 1]$.

• Th. 6 で, $\pi_1(W) = 0$ のときは, "つき" の McMillan, Jr. の定理 [5] になります:

"irreducible contractible open 3-mfd は, handlebody の増大列の union として表わせる."

Th. 6 の証明に必要な lemma をひとつあげておく.

Lemma. U : irreducible 3-mfd,

∂U : connected ($\neq S^2$), $\pi_1(\partial U) \xrightarrow{\cong} \pi_1(U)$. このとき,

$\text{Int } U \supset F$: 2-sided incompressible closed surface

$\implies F$: parallel to ∂U .

Th. 6 の証明の方針 $W \supset N$ を core とすると, Prop. 2 から,

$Cl(W - N) \supset U$ compo に対して, U は irreducible 3-mfd

$\partial U = U \cap N$ は ∂N のひとつの compo, $\partial U \xrightarrow{\cong} U$, U の end

の数はひとつである. 各 U に対して Th. 6 を示せばよい.

ます"つき"が いえる:

• $U = \bigcup_i K_i$ s.t.

(1) $U \supset K_i$: compact, irreducible 3-submfd

(2) $\partial K_i \supset \partial U$, $F_r K_i = \partial K_i - \partial U$: connected

(3) $K_i \subset K_{i+1} - F_r K_{i+1}$.

つきに, $V_0 = K_0$ とおき, V_0, \dots, V_{m-1} まで得られたとして, V_m を作ろう. $V_{m-1} \subset K_m - F_r K_m$ としてよい. 帰納法の仮定から, $V_{m-1} = N_{m-1} \cup (1\text{-handles})$, N_{m-1} は ∂U の collar. $U' = \text{Cl}(U - N_{m-1})$, $K' = \text{Cl}(K_m - N_{m-1})$ とおく. K' に U' のなかで "cut and paste" をこれ以上はおこなえなくなるまでほどし, K' から K^* を得たとする. $\text{Cl}(U' - K^*)$ の唯一の non-compact compo を Y とし, $N' = \text{Cl}(U' - Y)$ とおく. $N' \cap Y$ は K^* のひとつの compo で U' のなかで incompressible であり, したがって上記の lemma から N' は U' における $\partial U'$ の collar である. $N_m = N_{m-1} \cup N'$ とおくと ∂U の collar になる. ここで, K' から K^* を得た process を考えると, $K' \subset K^* \cup (1\text{-handles}) \subset N' \cup \bigcup_i H_i$ (H_i : 1-handle) となっていることがわかる. したがって,

$$V_m = N_m \cup \bigcup_i H_i \quad \text{とおけばよい. } \square$$

References

- [1] D.Epstein : Ends, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, ed. M.K.Fort (Prentice-Hall, 1962), 110-117.
- [2] D.E.Galewski, J.G.Hollingsworth and D.R.McMillan,Jr. : On the fundamental group and homotopy type of open 3-manifolds, Gener. Top. and its Appl. 2 (1972), 299-313.
- [3] W.H.Jaco : Lectures on Three-Manifold Topology, AMS Regional Conference Series in Math. 43 (1980).
- [4] D.McCullough : Compact submanifolds of 3-manifolds with boundary (preprint, 1985).
- [5] D.R.McMillan, Jr. : Cartesian product of contractible open manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 510-514.
- [6] ——— : Some contractible open 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 373-382.
- [7] G.P.Scott : Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented, J. London Math. Soc. 6 (1973), 437-440.
- [8] ——— : Compact submanifolds of 3-manifolds, J.London Math. Soc. 7 (1973), 246-250.
- [9] J.Simon : Compactifications of covering spaces of compact 3-manifolds, Michigan Math. J. 23 (1976), 245-256.
- [10] T.Tucker : Non-compact 3-manifolds and the missing -boundary problem, Topology 13 (1974), 267-273.
- [11] F.Waldhausen : On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.
- [12] J.H.C.Whitehead : A certain open manifold whose group is unity, Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 268-279.